CLASA a 12-a

1. Calculaţi

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\,\mathrm{d}x.$$

***

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $x = 6 - t$ obţinem

$$I = \int_4^2 \frac{\sqrt{\ln(3+t)}}{\sqrt{\ln(3+t)}+\sqrt{\ln(9-t)}}(-1)\,\mathrm{d}t = J, \qquad \ldots\ldots\ldots \textbf{4p}$$

iar $I + J = \int_2^4 1\,\mathrm{d}x = 2$, deci $I = 1$ **3p**

2. Fie M o mulţime dotată cu o lege de compoziţie asociativă „$\cdot$”, având proprietăţile:
i) dacă $x, y, z \in M$ şi $xy = xz$ sau $yx = zx$, atunci $y = z$;
ii) pentru orice $x \in M$, mulţimea $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.
Arătaţi că $(M, \cdot)$ este grup.

***

Soluţie. Să fixăm $a \in M$. Deoarece mulţimea $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită, există $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p > q$ astfel încât $a^p = a^q$. Arătăm că $e = a^{p-q}$ este element neutru **2p**
Într-adevăr, dacă $x \in M$ atunci $a^p x = a^q x$ de unde, conform i), $a^{p-q}x = x$, adică $ex = x$. În mod similar deducem $xe = x$, $\forall x \in M$ **3p**
Luând acum $x \in M$ oarecare, există $p, q \in \mathbb{N}$, $p - 1 > q > 0$, astfel încât $x^p = x^q$, ceea ce arată că x are inversul x^{p-q-1} **2p**

3. Determinaţi valoarea maximă a integralei $\int_0^y \sqrt{x^4 + (y - y^2)^2}dx$ pentru $0 \leqslant y \leqslant 1$.

***

Soluţie. Avem $I \leqslant \int_0^y (x^2 + (y - y^2))dx = y^2 - \frac{2y^3}{3} \leqslant \frac{1}{3}$ **4p**
Cum pentru $y = 1$ obţinem $I = \frac{1}{3}$, reiese că maximul cerut este $\frac{1}{3}$ **3p**

4. Fie $(L, +, \cdot)$ un corp comutativ în care $1 + 1 \neq 0$. Arătaţi că soluţiile ecuaţiei $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \in L$ sunt $(1, 0)$ şi perechile de forma $((r^2 - 1)(r^2 + 1)^{-1}, 2r(r^2 + 1)^{-1})$, unde $r \in L$, $r^2 \neq -1$.

***

Soluţie. Prin verificare directă, rezultă că perechile enumerate în enunţ sunt soluţii **2p**
Reciproc, dacă o pereche (x, y) este soluţie şi $x \neq 1$, fie $r = y(1 - x)^{-1}$ **2p**
Atunci $r^2 = y^2(1 - x)^{-2} = (1 - x^2)(1 - x)^{-2} = (1 + x)(1 - x)^{-1}$, de unde $(1 - x)r^2 = 1 + x$, sau $x = (r^2 - 1)(r^2 + 1)^{-1}$ **2p**
De asemenea, $y = r(1 - x) = r\left(r^2 + 1 - (r^2 - 1)\right)(r^2 + 1)^{-1} = 2r(r^2 + 1)^{-1}$ **1p**